Phần II

Chương 3. BÀI TOÁN LIỆT KÊ

## 3.1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Cho tập . Từ các phần tử của A, ta tạo ra các cấu hình tổ hợp theo một quy tắc nào đó và gọi B là tập tất cả các cấu hình tổ hợp đó. Bài toán đặt ra là hãy liệt kê tất cả các cấu hình tổ hợp của B. Khác với bài toán đếm là tìm số phần tử của B, trong bài toán này, ta phải lập một danh sách cấu hình chỉ rõ từng phần tử của B. Rõ ràng là có nhiều cách liệt kê khác nhau, tuy nhiên chúng phải bảo đảm 2 nguyên tắc sau đây:

Một là: Không bỏ sót, nghĩa là phần tử nào cũng phải được liệt kê.

Hai là: Không trùng lặp, nghĩa là không có phần tử nào được liệt kê quá một lần.

Khó khăn của việc giải bài toán liệt kê là sự “bùng nổ tổ hợp” nghĩa là khi số phần tử cần liệt kê là một số lớn. Thí dụ, tập B có 1 triệu phần tử, đây không phải là con số lớn đối với các bài toán tổ hợp, và giả sử cứ 1 giây thì máy tính có thể liệt kê được 1 phần tử thì ta phải làm việc trên máy tính trong 35 ngày, mỗi ngày 8 giờ.

Tuy nhiên, nếu số cấu hình tổ hợp không lớn thì cùng với máy tính, phương pháp liệt kê lại có thể giải được một số bài toán khó mà cho đến nay người ta cũng chưa tìm được phương pháp tổng quát để đếm các phần tử của B.

Thí dụ như có bao nhiêu cách xếp 8 quân hậu lên 1 bàn cờ vua sao cho chúng từng đôi một không khống chế lẫn nhau (nghĩa là 2 quân hậu bất kỳ không được đứng chung 1 hàng, 1 cột hay 1 đường chéo). Hoặc có bao nhiêu cách phủ kín một bàn cờ vua bằng 32 quân đôminô.

## 3.2. THUẬT TOÁN SINH

Thuật toán sinh là một thuật toán có thể áp dụng để giải các bài toán liệt kê các tổ hợp, thuật toán này dựa trên 2 giả thiết sau đây:

* Có thể xác định được một thứ tự toàn bộ trên tập các cấu hình tổ hợp cần liệt kê, từ đó xác định được cấu hình tổ hợp đầu tiên và cấu hình tổ hợp cuối cùng trong thứ tự đã xác định đó.
* Đưa ra được một thuật toán để từ một cấu hình hiện có, tìm được cấu hình tiếp theo, nếu không tìm được cấu hình tiếp theo thì phải khẳng định được (chứng minh được) cấu hình hiện có là cấu hình cuối cùng (nghĩa là không còn một cấu hình nào khác ngoài các cấu hình đã liệt kê.)

*Thí dụ.* Liệt kê tất cả các dãy nhị phân có độ dài n.

Ta xếp các dãy này theo thứ tự tự nhiên, tức là theo thứ tự của số mà nó biểu diễn, nghĩa là dãy đầu tiên gồm n số 0 và dãy cuối cùng gồm n số 1.

Thuật toán liệt kê được tiến hành như sau: Giả sử dãy hiện có là  trong đó . Tìm thứ tự i sao cho  và .

+ Chẳng hạn dãy hiện có: 0010...0110011

Thì dãy tiếp theo nó là: 0010...0110111

Rồi: 0010...0111111, 0010...1111111, v..v..

Dãy cuối cùng: 1111...1111111.

Nếu không tìm thấy có nghĩa là ; đây chính là dãy nhị phân cuối cùng; việc liệt kê kết thúc.

Nếu tìm thấy  như thế, thì dãy nhị phân tiếp theo sẽ là: thay  và .

Dãy kế tiếp này chính là cộng thêm 1 (theo mô đun 2, có nhớ) vào dãy hiện có.

Như vậy dãy nhị phân được liệt kê theo thứ tự sau:



Thuật toán sinh có những hạn chế sau:

* Trong nhiều bài toán việc tìm cấu hình ban đầu thường không phải là đơn giản, thậm chí ngay cả sự tồn tại một cấu hình như thế nhiều khi vẫn còn là điều nghi vấn.
* Mặt khác việc sắp xếp thứ tự các cấu hình nhiều khi rất phức tạp, do đó không phải một cấu hình kế tiếp nào cũng được sinh ra từ một cấu hình hiện có một cách đơn giản.

Hãy xét thí dụ:

Liệt kê tất cả các cách điền các chữ số nguyên dương (từ 1 đến 9) vào 9 ô vuông nhỏ trong một hình vuông lớn sao cho tổng các chữ số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau.

Tổng : 1 + 2 + ......+ 7 + 8 + 9 = 45 nên tổng của 3 số trong 1 hàng, 1 cột hoặc 1 đường chéo phải là : 15 = 1 + 9 + 5 = 2 + 7 + 6 = 3 + 4 + 8

Việc đưa ra một cấu hình đầu tiên tuy không đơn giản nhưng không đến nỗi quá khó, chẳng hạn có thể đưa ra một cấu hình như dưới đây:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

* Để tìm ra 1 cấu hình đầu tiên, có thể suy luận theo cách loại trừ:
* Chẳng hạn trong hình vuông, đầu tiên ta an vị cho số 9 ở góc Tây-Bắc:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 9 | x | x |
| x | x |  |
| x |  | x |

Khi đó các số: 8, 7, 6 không thể an vào các ô đánh dấu x vì tổng số các số trên hàng, cột hoặc đường chéo sẽ quá 15 => chỉ còn lại 2 ô cho 3 số: LOẠI

* Thử an vị cho 9 ở ô (1,2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x(2) | 9 | x(4) |
| 7 | x(5) | (3) |
| 6 | x (1) | 8 |

Khi đó các số 8, 7, 6 không thể an tại các ô có dấu x, đồng thời số 7 và số 8 không được cùng hàng. Chẳng hạn ghi vào các ô (2,1): 7; (3.1):6; (3,3):8. Dễ dàng suy tiếp ra các số gán cho các ô còn lại.

Việc sinh ra một cấu hình tiếp theo từ cấu hình này rất đơn giản và có nhiều cách, chẳng hạn như: hoán vị 2 hàng biên hoặc 2 cột biên, chuyển vị qua đường chéo chính hoặc phụ, quay hình vuông 900 theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ, …. Nhưng khó khăn lại ở chỗ ta không biết sắp xếp các cấu hình này theo thứ tự nào để biết được đâu là cấu hình cuối cùng, nghĩa là ta chưa chỉ ra được thủ tục để kết thúc thuật toán.

Qua thí dụ trên ta thấy rằng thuật toán sinh có những hạn chế nên tính phổ dụng không cao.

## 3.3. THUẬT TOÁN QUAY LUI

Ý tưởng cơ bản của thuật toán này là để xây dựng 1 cấu hình gồm n thành phần, người ta xây dựng dần các thành phần của cấu hình bằng cách thử lại tất cả các khả năng. Giả sử cấu hình cần xây dựng có n thành phần là . Giả thiết ở bước k ta đã xây dựng được  thành phần  và bây giờ xác định thành phần . Ta duyệt tất cả các khả năng có thể đề cử cho  và đánh số các khả năng ấy là . Với mỗi khả năng  ta kiểm tra xem i có chấp nhận được không.

Có thể xảy ra 2 trường hợp:

- Nếu chấp nhận i thì xác định  theo i, sau đó nếu  thì ta có một cấu hình, nếu  thì ta chuyển sang bước .

- Nếu  mà không có khả năng nào chấp nhận được thì ta quay lại bước  để xác định .

Điểm mấu chốt của thuật toán này bao gồm 2 điểm chính sau đây:

Một là: Đưa ra một danh sách mọi khả năng đề cử cho i, nghĩa là không được bỏ sót một khả năng nào.

Hai là: Phải ghi nhớ tại mỗi bước đã đi qua, những khả năng nào đã được thử để tránh trùng lặp và đảm bảo tính quay lui. Rõ ràng những thông tin này phải được lưu trữ theo cơ cấu “ngăn xếp” (stack: vào sau, ra trước).

Hai yêu cầu: không bỏ sót và không trùng lặp luôn luôn là những đòi hỏi nghiêm khắc đối với bài toán đếm cũng như bài toán liệt kê.

***CÂY tìm kiếm lời giải.***

Quá trình tìm lời giải theo thuật toán quay lui có thể mô tả bởi cây tìm kiếm lời giải như dưới đây. Người ta còn có thể sử dụng “cây tìm kiếm lời giải” để liệt kê các dãy nhị phân, liệt kê các hoán vị và các tổ hợp. Dưới đây ta xét một vài thí dụ.



**Hình 3.9. Cây tìm kiếm lời giải theo thuật toán quay lui**

*Thí dụ 1. (Bỏ qua thí dụ này)*

Liệt kê các cách xếp 4 quân hậu lên một hình vuông gồm 16 ô vuông () sao cho các quân hậu đó từng đôi một không khống chế lẫn nhau.

Ta đánh dấu các cột bởi các chữ A, B, C, D và các hàng bởi các số 1, 2, 3, 4.

Đầu tiên ta xác định vị trí cho quân hậu ở cột A. Có 4 khả năng lựa chọn là .

- Giả sử ta lựa chọn vị trí . Khi đó các ô bị khống chế là . Ta xóa các ô này bởi dấu  (hình 3.1).

Bây giờ để lựa chọn vị trí cho quân hậu ở cột B, ta chỉ có 2 khả năng là .Nếu chọn  ta có kết quả như hình 3.2 và nếu chọn  thì kết quả như hình 3.3.

Trên hình 3.2 không còn 1 ô trống nào để có thể xếp chỗ cho quân hậu trên cột C.

Vậy việc chọn  là không chấp nhận được.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |  |  | A | B | C | D |  |  | A | B | C | D |
| 1 | ۩ |  |  |  |  | 1 | ۩ |  |  |  |  | 1 | ۩ |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  | ۩ |  |
| 3 |  |  |  |  |  | 3 |  | ۩ |  |  |  | 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  | 4 |  |  |  |  |  | 4 |  | ۩ |  |  |
| **Hình 3.1 Hình 3.2 Hình 3.3** | | | | | | | | | | | | | | | | |

Trên hình 3.3, cột C chỉ còn 1 ô trống là  để xếp hậu, khi đó ô  đều bị khống chế, nên không còn ô trống nào để xếp hậu trên cột D. Vậy việc chọn  cũng không thể chấp nhận.

Do đó việc xếp hậu tại  không thể chấp nhận.

Do tính chất đối xứng của hình vuông nên việc xếp hậu tại  cũng bị loại trừ.

Vậy chỉ còn lại 2 khả năng là xếp hậu tại  hoặc .

* Xếp hậu tại . Xem hình 3.4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |  |  | A | B | C | D |  |  | A | B | C | D | |
| 1 |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  | 1 |  |  | ۩ |  | |
| 2 | ۩ |  |  |  |  | 2 | ۩ |  |  |  |  | 2 | ۩ |  |  |  | |
| 3 |  |  |  |  |  | 3 |  |  |  |  |  | 3 |  |  |  | ۩ | |
| 4 |  |  |  |  |  | 4 |  | ۩ |  |  |  | 4 |  | ۩ |  |  | |
| **Hình 3.4 Hình 3.5 Hình 3.6** | | | | | | | | | | | | | | | | |

Khi đó chỉ còn một khả năng duy nhất để xếp hậu ở cột B, đó là . Sau khi xếp hậu ở  thì cũng chỉ còn một khả năng duy nhất để xếp hậu ở cột C, đó là .

Sau khi xếp hậu ở  thì cũng chỉ còn 1 khả năng duy nhất để xếp hậu ở cột D, đó là . (Xem hình 3.5, 3.6).

Vậy ta có được 1 cấu hình (hình 3.7).

Tương tự nếu chọn  cho quân hậu đầu tiên thì ta có 1 cấu hình nữa (hình 3.8).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |  |  | A | B | C | D |
| 1 |  |  | ۩ |  |  | 1 |  | ۩ |  |  |
| 2 | ۩ |  |  |  |  | 2 |  |  |  | ۩ |
| 3 |  |  |  | ۩ |  | 3 | ۩ |  |  |  |
| 4 |  | ۩ |  |  |  | 4 |  |  | ۩ |  |
|  | **Hình 3.7 Hình 3.8** | | | | | | | | | |

Trong thí dụ 1 ở trên, cây tìm kiếm lời giải cho bài toán liệt kê 4 quân hậu theo thuật toán quay lui được thể hiện như sau:

Gốc

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | | | | | | | | |  |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ۩ |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |
|  |  |  | | | | |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  | | | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ۩ |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  | ۩ |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ۩ |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ۩ |  |  |
|  | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  | ۩ | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  | | ۩ | |  | |  | |  | ۩ |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | ۩ |  |  | ۩ |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | | ۩ |  |  |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | ۩ |  |  |  |  | ۩ | |  | |  | |  | |  |  | ۩ |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | ۩ | |  | |  | |  | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ۩ |  | |  | |  | |  | |  |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | | ۩ | |  | | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ۩ | |  | |  | |  | |  |  | ۩ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Hình 3.10**

Trên hàng thứ nhất là 4 khả năng lựa chọn vị trí cho quân hậu ở cột A.

Trên hàng thứ hai là các khả năng lựa chọn vị trí cho quân hậu ở cột B sau khi vị trí của quân hậu ở cột A đã được lựa chọn (hàng 2 có 6 khả năng)

Trên hàng thứ 3 là các khả năng lựa chọn vị trí cho quân hậu ở cột C sau khi vị trí của các quân hậu ở cột A và cột B đã được chọn. Hàng 3 chỉ có 4 khả năng, nghĩa là có 2 trường hợp không lựa chọn được vị trí cho quân hậu ở cột C.

Trên hàng cuối cùng là các vị trí cho quân hậu ở cột D sau khi vị trí của các quân hậu ở các cột A, B, C đã lựa chọn. Chỉ có 2 trường hợp, tương ứng với 2 cách xếp 4 quân hậu thỏa mãn điều kiện của bài toán đề ra.

*Thí dụ 2.* Hãy liệt kê tất cả các con số hàng trăm gồm các chữ số khác nhau được chọn từ tập A = {1, 3, 5, 7, 9} và tạo thành các dãy tăng (số hàng trăm < số hàng chục < số hàng đơn vị). Ta có ***cây tìm kiếm lời giải*** dưới đây:



**Hình 3.11**

Dễ dàng thấy rằng số các con số này đúng bằng số tổ hợp: .

## BÀI TẬP CHƯƠNG 3

***1/ Thuật toán SINH giải bài toán liệt kê:***

* **Tạo một cấu hình ban đầu.**
* **Chỉ ra cách tìm các cấu hình kế tiếp**
* **Cấu hình kết thúc (hoặc xác định được số cấu hình có thể có)**

***2/ Thuật toán LÙI: Dựng cây liệt kê các cấu hình.***

**Bài tập:**

**3.1.** Hãy liệt kê tất cả các hoán vị của 4 chữ a, b, c, d trong đó:

a) Chữ a ở vị trí đầu tiên.

b) Chữ b ở vị trí cuối cùng.

c) Chữ a ở vị trí đầu tiên và chữ b ở vị trí cuối cùng.

**Giải:** Dùng cây: a) **a**  { hoán vị của b,c,d}; có 3! = 6 hoán vị

**a**

**b c d**

**c d b d b c**

**d c d b c d**

Tương tự: b) { hoán vị của a,c,d} **b** ; có 3! = 6 hoán vị

c) **a** {hoán vị của c,d} **b** ; có 2! = 4 hoán vị

**3.2.** Hãy liệt kê tất cả các hoán vị của 4 chữ số 1, 2, 3, 4 mà

a) Chữ số đầu tiên là lẻ.

b) Chữ số đầu tiên là chẵn và chữ số cuối cùng là lẻ.

*(tự làm)*

**3.3.** Hãy kiệt kê tất cả các dãy nhị phân có độ dài 5 trong đó có ít nhất 3 số 1 đứng liền nhau. *(tự làm)*

**3.4.** Liệt kê tất cả các hoán vị của{1,2,3,4,5,6}sao cho tổng 3 số đầu bằng tổng 3 số cuối.

**Giải:** Tổng của 6 số là 21 - là số lẻ: không thể có tổng 2 số đầu = tổng 3 số cuối vì nếu vậy thì tổng 6 số lại là số chẵn!

**3.5.** Liệt kê tất cả các tập con gồm 3 phần tử của tập . ***ĐS: C53***

**3.6.** Cho một lưới ô vuông gồm  ô vuông. Hãy liệt kê tất cả các cách xếp 9 chữ số {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} vào các ô vuông sao cho tổng các chữ số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau.

**Giải:**

Liệt kê tất cả các cách điền các chữ số nguyên dương (từ 1 đến 9) vào 9 ô vuông nhỏ trong một hình vuông lớn sao cho tổng các chữ số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau.

Tổng : 1 + 2 + ......+ 7 + 8 + 9 = 45 nên tổng của 3 số trong 1 hàng, 1 cột hoặc 1 đường chéo phải là : 15 = 1 + 9 + 5 = 2 + 7 + 6 = 3 + 4 + 8

Việc đưa ra một cấu hình đầu tiên tuy không đơn giản nhưng không đến nỗi quá khó, chẳng hạn có thể đưa ra một cấu hình như dưới đây:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

* Để tìm ra 1 cấu hình đầu tiên, có thể suy luận theo cách loại trừ:
* Chẳng hạn trong hình vuông, đầu tiên ta an vị cho số 9 ở góc Tây-Bắc:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **9** | x | x |
| x | x |  |
| x |  | x |

Khi đó các số 6, 7, 8 không thể đặt vào các ô đánh dấu x vì tổng số các số trên hàng, cột hoặc đường chéo sẽ quá 15 => chỉ còn lại 2 ô cho 3 số: LOẠI

* Thử an vị cho 9 ở ô (1,2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x(2) | **9** | x(4) |
| 7 | x(5) | (3) |
| 6 | x (1) | 8 |

Khi đó các số 8, 7, 6 không thể an tại các ô có dấu x, đồng thời số 7 và số 8 không được cùng hàng hay cùng cột. Chẳng hạn ghi vào các ô (2,1): 7; (3.1):6; (3,3):8. Dễ dàng suy tiếp ra các số gán cho các ô còn lại.

Việc sinh ra một cấu hình tiếp theo từ cấu hình này rất đơn giản và có nhiều cách, chẳng hạn như: hoán vị 2 hàng biên hoặc 2 cột biên, chuyển vị qua đường chéo chính hoặc phụ, quay hình vuông 900 theo chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ, ….

Cũng có thể tìm cấu hình đầu tiên bằng cách an vị số 1 trước tiên, chẳng hạn ở ô Tây-Bắc. Khi đó 3 số 2, 3, 4 không thể nằm ở các ô có đấnh dấu x vì nếu vậy thì tổng 3 số không thể bằng 15. Chỉ còn lại 2 ô cho 3 số: LOẠI. Lại xét thử an vị số 1 vào ô ( hàng1, cột 2) v..v.. tương tự như trên.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | x | x |
| x | x |  |
| x |  | x |

*Nhưng khó khăn lại ở chỗ ta không biết sắp xếp các cấu hình này theo thứ tự nào để biết được đâu là cấu hình cuối cùng, nghĩa là ta chưa chỉ ra được thủ tục để kết thúc thuật toán.*

**3.7.** Hãy liệt kê tất cả các cách xếp 5 quân hậu lên một bàn cờ gồm  ô vuông sao cho không có quân hậu nào khống chế quân hậu nào.

**3.8.** Hãy liệt kê tất cả các cách xếp 6 quân hậu lên một bàn cờ gồm  ô vuông sao cho không có quân hậu nào khống chế quân hậu nào.

**3.9.** Hãy liệt kê tất cả các cách xếp 8 quân hậu lên bàn cờ  ô vuông sao cho không có quân hậu nào khống chế quân hậu nào, với giả thiết đã có 2 quân hậu xếp ở 2 vị trí cố định là  và 

**3.10.** Hãy liệt kê tất cả các cách phủ một bàn cờ  ô vuông bằng 8 quân đôminô.

**3.11.**  Liệt kê tất cả các nghiệm của phương trình

 và nguyên, )

**Giải:**  Số nghiệm là: R44 = C74 = 35 nghiệm. Liệt kê lần lượt theo các giá trị của các xi = 0,1,2,3,4 bằng ***cây liệt kê nghiệm***:

0-0-0-4; 0-0-1-3;0-0-2-2; 0-0-3-1; 0-0-4-0; 0-0-1-3; 0-0-2-2; 0-0-3-1;

0-1-0-3; 0-1-1-2; 0-1-2-1; 0-1-3-0... ... ; 4-0-0-0

**3.12.**  Liệt kê tất cả các nghiệm của phương trình

 và nguyên, ). ***ĐS: R64 = C94***

Chương 4. BÀI TOÁN TỒN TẠI

## 4.1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Trong các bài toán đếm và bài toán liệt kê, người ta tập trung sự chú ý vào việc đếm hoặc liệt kê các cấu hình tổ hợp thỏa mãn một số tính chất nào đó và thừa nhận sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp đó là hiển nhiên. Tuy nhiên có rất nhiều bài toán, việc chỉ ra sự tồn tại của một cấu hình thỏa mãn những tính chất cho trước là rất khó khăn. Chẳng hạn, một kỳ thủ trước một tình huống cụ thể của một ván cờ, cần suy nghĩ xem liệu có một dãy các nước đi để chắc chắn thắng được đối phương hay không. Nhiều khi ta không tìm được lời giải nhưng cũng không khẳng định được là không có lời giải. Như vậy nội dung của bài toán tồn tại khác hẳn với các bài toán đếm và liệt kê. Vấn đề đặt ra ở đây là: có hay không một cấu hình tổ hợp thỏa mãn một số tính chất cho trước? Điều này kéo theo sự khác nhau cả về phương pháp tư duy và thuật toán. Bài toán tồn tại xem như được giải quyết nếu ta tìm được một cấu hình hoặc chứng minh được sự tồn tại của cấu hình. Nhiều khi ta không tìm được một cách cụ thể cấu hình đó; mà chỉ nêu ra được một cách xây dựng cấu hình, hoặc là chứng minh được rằng cấu hình cần tìm là không có thì bài toán cũng coi như được giải quyết. Để thấy rõ nội dung đa dạng và tính chất phức tạp của bài toán tồn tại, dưới đây ta hãy xét một số bài toán cổ điển nổi tiếng.

**4.1.1. Bài toán đội hình duyệt binh của 36 sĩ quan.**

Có 6 đơn vị quân đội A, B, C, D, E, F; mỗi đơn vị cử 6 sĩ quan với 6 cấp bậc khác nhau: a, b, c, d, e, f. Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan thành một đội ngũ hình vuông (6 hàng ngang, 6 hàng dọc) sao cho mỗi hàng ngang và mỗi hàng dọc đều có người của tất cả các đơn vị và tất cả các cấp bậc sĩ quan.

\*Bài toán có thể mở rộng cho n đơn vị quân đội với n cấp bậc sĩ quan khác nhau.

Chẳng hạn với  ta có một lời giải như sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ab | Ba | Cc | Dd |
| Bc | Ad | Db | Ca |
| Cd | Dc | Aa | Bb |
| Da | Cb | Bd | Ac |

Một lời giải cho trường hợp  là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Aa | Bb | Cc | Dd | Ee |
| Bc | Ca | Db | Ec | Ad |
| Cd | De | Ea | Ab | Bc |
| Dc | Ed | Ae | Ba | Cb |
| Eb | Ac | Bd | Ce | Da |

Từ lời giải này ta có thể tìm thấy các lời giải khác bằng cách hoán vị các hàng và các cột. Do lời giải có thể biểu diễn bởi 2 hình vuông với các chữ cái viết hoa và viết thường chồng cạnh nhau nên bài toán tổng quát còn được đặt ra với tên gọi là bài toán về các “hình vuông la tinh trực giao”

Bài toán này do Euler đề xuất và ông mất khá nhiều thời gian cho bài toán  mà không đạt kết quả nên ông đưa ra một giả thuyết là bài toán này không có lời giải, ngoài ra bài toán  cũng không có lời giải nên Euler nêu lên một giả thuyết tổng quát là bài toán với  thì không có lời giải. Giả thuyết này của Euler tồn tại suốt gần hai thế kỷ.

Mãi đến năm 1901, Tarri - một nhà toán học Pháp - đã chứng minh được rằng với  bài toán không có lời giải bằng cách duyệt tất cả các khả năng xếp, và đến năm 1960, ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker và Srikanda mới tìm được phương pháp xây dựng hình vuông la tinh trực giao cho các trường hợp:  với ; còn các trường hợp khác vẫn còn là những thách thức hóc búa với trí tuệ loài người.

**4.1.2. Bài toán tô màu bản đồ.**

Các nhà nghiên cứu về bản đồ tô màu bản đồ địa lý theo quy tắc sau: Hai nước có chung đường biên giới phải được tô bởi 2 màu khác nhau. Hãy chứng minh rằng mọi bản đồ địa lý có thể tô bằng 4 màu.

Người ta đã chứng minh được rằng mọi bản đồ đều có thể tô với số màu lớn hơn 4, và với số màu ít hơn 4 thì không thể tô được. Tuy nhiên mọi bản đồ thực tế chỉ cần 4 màu là đủ; không ai tìm được một bản đồ mà bắt buộc phải tô bằng 5 màu.

Bài toán này do một thương nhân người Anh là Gazri đề ra từ những năm 1850; người ta cố gắng chứng minh rằng chỉ cần 4 màu là đủ. Sau hơn một thế kỷ, mãi đến năm 1976 hai nhà toán học Mỹ là K.Appel và W.Haken mới chứng minh được giả thuyết này bằng máy tính điện tử.

Tuy nhiên người ta vẫn nghi ngờ tính đúng đắn của cách chứng minh có sự trợ giúp của máy tính điện tử này.

Vì vậy vào cuối những năm 1990 hai tác giả trên đã công bố cách chứng minh của mình bằng một cuốn sách dày 800 trang.

**4.1.3. Bài toán hình lục giác huyền bí.**

Bài toán này do Cliford Adams đề ra năm 1910, nội dung như sau:

Hãy điền các số từ 1 đến 19 vào 19 ô hình lục giác (như hình vẽ) sao cho tổng các số theo 3 chiều của các cạnh hình lục giác đều bằng nhau.

Hơn nửa thế kỷ sau, năm 1962, Adams đã công bố lời giải như hình vẽ dưới đây. Điều bất ngờ đây lại là lời giải duy nhất nếu bỏ qua những lời giải được suy ra từ một phép biến hình đơn giản, chẳng hạn quay hình lục giác một góc 600.



**Hình 4.1**

**4.1.4. Bài toán chọn 2n điểm trên lưới hình vuông  điểm.**

Cho một lưới ô vuông  điểm. Hỏi có thể chọn ra 2n điểm sao cho không có 3 điểm nào (được chọn) là thẳng hàng hay không?

Bài toán có nhiều cách ứng dụng trong lý thuyết trò chơi, trong truyền tin và một vài ứng dụng khác. Với những giá trị lớn của n, sự tồn tại lời giải vẫn là bài toán ngỏ.

Hình dưới đây cho một lời giải với .



**Hình 4.2**

## 4.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỒN TẠI

**4.2.1. Phương pháp phản chứng.** *Sẽ nói kỹ ở phần 4, Chương 8*

Giả sử ta phải giải bài toán:

*Nếu có A thì có B (nghĩa là ).* Ở đây A là giả thiết, B là kết luận.

Lập luận của phương pháp phản chứng là: Giả thiết rằng B là sai (không có B); bằng các quy tắc suy diễn logic, ta sẽ đi đến một kết luận mâu thuẫn với giả thiết A đã cho (tức là không có A), (nghĩa là ), tương ứng với mệnh đề phản đảo của mệnh đề cần chứng minh.

*Thí dụ.*

Một đội bóng đá gồm 20 cầu thủ đeo số áo từ 1 đến 20, đứng ngẫu nhiên thành một vòng tròn. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất một nhóm gồm 4 cầu thủ đứng liền nhau mà tổng các số ghi trên áo của họ .

*Giải.* Chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử điều này không xảy ra, nghĩa là tổng các số ghi trên áo các cầu thủ của tất cả các nhóm gồm 4 cầu thủ đứng liền nhau đều .

Có tất cả 20 nhóm như thế; (X1,X2,X3,X4),(X2,X3,X4,X5), ... (X19,X20,X1,X2).(X20,X1,X2,X3), cho nên nếu ký hiệu S là tổng các số ghi trên áo của tất cả các nhóm thì ta có:



Vì các cầu thủ xếp vòng tròn, mỗi nhóm gồm 4 cầu thủ đứng liền nhau nên mỗi cầu thủ được xếp vào 4 nhóm khác nhau, do đó khi tính tổng các số ghi trên áo của tất cả các nhóm thì số áo của mỗi cầu thủ được tính 4 lần. Vậy 

Từ kết quả trên suy ra tổng các số ghi trên áo của mỗi nhóm đều phải bằng 42. Điều này không thể xảy ra vì 2 nhóm kề nhau thì khác nhau 1 cầu thủ nên không thể có tổng các số ghi trên áo của họ bằng nhau được.

Mệnh đề đã được chứng minh.

Có một số bài toán tồn tại mà lời giải của nó có thể khái quát hóa cho một lớp khá rộng các bài toán, nên người ta trình bày các bài toán đó dưới dạng một định lý gọi là định lý tồn tại.

**4.2.2. Bài toán nhốt chim bồ câu và định lý Dirichlet. *(Quan trọng)***

***a) Định lý Dirichlet giản đơn.***

Nếu nhốt  con chim vào n chiếc lồng (n là số nguyên dương) thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con chim.

*Chứng minh.*

Nếu không có lồng nào chứa từ 2 con chim trở lên thì số chim trong mỗi lồng đều ; do đó số chim trong n lồng phải ; mâu thuẫn với giả thiết có  con chim.

Định lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng; ta nêu lên một vài thí dụ.

*Thí dụ 1.*

Trong số 13 sinh viên chọn bất kỳ, có ít nhất 2 sinh viên sinh cùng một tháng.

*Thí dụ 2.*

Cho . Chọn ra 5 số bất kỳ. Chứng minh rằng có ít nhất 2 số có tổng bằng 9.

Thật vậy, ta chia 8 số đã cho làm 4 nhóm và coi mỗi nhóm như 1 lồng chim:



Mỗi số ta chọn ra coi như 1 con chim; mỗi số thuộc vào một nhóm nào đó. Vậy nhốt 5 con chim vào 4 chiếc lồng, theo định lý Dirichlet sẽ luôn có ít nhất 1 nhóm chứa 2 số; 2 số này có tổng bằng 9. Bài toán đã được giải quyết.

***b) Định lý Dirichlet tổng quát.***

Nhốt n con chim vào k chiếc lồng (n, k là số nguyên dương) thì sẽ có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất  con chim; trong đó  là số nguyên nhỏ nhất trong các số nguyên lớn hơn hoặc bằng .

*Chứng minh.*

Nếu điều này không xảy ra thì số chim trong mỗi lồng đều .

Khi đó số chim trong tất cả các lồng sẽ là n và 

Chú ý rằng  hay 

Thay vào trên sẽ có: 

Mà  là một điều vô lý.

*Thí dụ 1.*

Trong lớp có 50 sinh viên; chứng minh rằng có ít nhất 5 sinh viên có cùng tháng sinh.

Coi 12 tháng như 12 lồng chim; 50 sinh viên như 50 con chim. Định lý Dirichlet tổng quát cho ta đáp số  sinh viên có cùng tháng sinh.

*Thí dụ 2.*

Cho 6 điểm  trên cùng 1 mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối tất cả các đỉnh đó với nhau bằng các cạnh có màu xanh hoặc đỏ (một cách tùy ý). Chứng minh rằng có ít nhất một tam giác có 3 cạnh cùng 1 màu (xanh hoặc đỏ).

Xét 5 cạnh nối với điểm ; đó là ; 5 cạnh này được tô bởi 2 màu. Theo định lý Dirichlet có ít nhất 3 cạnh tô bởi 1 màu; chẳng hạn  có màu đỏ.

Xét tam giác : nếu tam giác này có 1 cạnh màu đỏ , chẳng hạn cạnh  thì tam giác  có 3 cạnh cùng màu đỏ; nếu tam giác  không có cạnh nào màu đỏ thì đó là tam giác có 3 cạnh màu xanh.

Vậy trong trường hợp nào ta cũng có tam giác 1 màu: màu đỏ (hình 4.4), màu xanh (hình 4.5).

**Hình 4.4. Hình 4.5.**

Tam giác  màu đỏ Tam giác  màu xanh

Chú ý rằng với  bài toán luôn đúng, còn với  có thể bài toán không còn đúng nữa.

## 

## BÀI TẬP CHƯƠNG 4

**4.1.** Chứng minh rằng trong số 10 sinh viên bất kỳ luôn chọn được 1 nhóm 5 nam hoặc 1 nhóm 6 nữ.

**4.2.** Một ngăn tủ đựng 10 chiếc tất màu nâu và 10 chiếc tất màu đen. Hỏi phải lấy ngẫu nhiên tối thiểu bao nhiêu chiếc tất để có một đôi tất để đi (2 chiếc tất đồng màu)

**4.3.** Phải gieo 1 con xúc xắc ít nhất bao nhiêu lần để có ít nhất một mặt xuất hiện ít nhất

a) 2 lần.

b) 3 lần.

c) 4 lần.

**4.4.** Chứng minh rằng trong 14 số lấy bất kỳ từ các số {1, 2, 3, …, 25} có ít nhất 2 số có tổng bằng 26.

**4.5.** Chứng minh rằng

a) Trong 5 số chọn từ 8 số nguyên dương đầu tiên có ít nhất 1 cặp số có tổng bằng 9.

b) Trong 7 số chọn từ 10 số nguyên dương đầu tiên có ít nhất 2 cặp số có tổng bằng 11.

**4.6.** Chứng minh rằng trong  số nguyên dương ; có ít nhất 2 số mà số này chia hết cho số kia.

**4.7.** Chứng minh rằng trong số 11 số khác nhau lấy từ {1, 2, …, 100} có ít nhất 2 số x và y sao cho .

**4.8.** Chứng minh rằng

a) Trong số 13 sinh viên chọn bất kỳ, có ít nhất 2 sinh viên có cùng tháng sinh.

b) Trong số 49 sinh viên bất kỳ, có ít nhất 5 sinh viên sinh vào cùng 1 tháng.

**4.9.** Chứng minh rằng trong số  số nguyên dương khác nhau, có ít nhất 2 số mà hiệu của chúng chia hết cho n.

**4.10.** Chứng minh rằng

a) Trong 10 số nguyên dương bất kỳ, có ít nhất 1 dãy mà tổng của chúng chia hết cho 10.

b) Trong m số nguyên dương bất kỳ, có ít nhất 1 dãy mà tổng của chúng chia hết cho m.

**4.11.** Chứng minh rằng trong số 10 điểm bất kỳ trong 1 tam giác đều có cạnh bằng 1; có ít nhất 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng 

**4.12.** Chứng minh rằng trong số 10 người tham dự một cuộc họp có ít nhất 2 người có số người quen bằng nhau. Mệnh đề này có đúng cho n người bất kỳ không?

**4.13.** Trong mặt phẳng Oxy, cho 5 điểm có tọa độ nguyên và không có 3 điểm nào thẳng hàng.

a) Có bao nhiêu cạnh nối giữa chúng.

b) Chứng minh rằng có ít nhất 1 đoạn thẳng mà trung điểm của nó cũng có tọa độ nguyên.

c) Muốn mệnh đề trên cũng đúng cho không gian 3 chiều Oxyz thì số điểm có tọa độ nguyên tối thiểu phải là bao nhiêu?

**4.14.** Trong một phố có 51 nhà được đánh số từ 1 đến 100. Chứng minh rằng có ít nhất 2 nhà có số liền nhau.

**4.15.** Có 16 cầu thủ đeo số áo từ 1 đến 16 đứng ngẫu nhiên thành 1 vòng tròn. Chứng minh rằng có ít nhất 1 nhóm gồm 4 cầu thủ đứng liền nhau có tổng các số ghi trên áo 

**4.16.** Cho 7 điểm trong không gian 3 chiều , trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Nối các điểm này bởi các cạnh xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất 2 tam giác một màu không có cạnh chung.

**4.17.** Có 10 người, trong đó 2 người bất kỳ hoặc là bạn của nhau hoặc là thù của nhau. Chứng minh rằng có ít nhất 3 người là bạn của nhau hoặc 4 người là thù của nhau hoặc có ít nhất 3 người là thù của nhau hoặc 4 người là bạn của nhau.

**4.18.** Có 13 nữ và 11 nam dàn hàng ngang 1 cách ngẫu nhiên. Chứng minh rằng có ít nhất 2 nữ mà giữa họ có 5 người khác xen vào.

**4.19.** Có 11 cuốn sách bìa đỏ và 9 cuốn sách bìa xanh xếp ngẫu nhiên thành 1 hàng trên giá sách. Chứng minh rằng có ít nhất 2 cuốn sách bìa màu đỏ mà giữa chúng có 4 cuốn sách khác xen vào.

**4.20.** Cho A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

a) Chứng minh rằng có ít nhất 6 tập con gồm 3 phần tử của A có tổng các chữ số là phần tử của chúng bằng nhau.

b) Chứng minh rằng có ít nhất 8 tập con gồm 4 phần tử của A có tổng các chữ số là phần tử của chúng bằng nhau.

**4.21.** Có 20 số nguyên dương khác nhau . Chứng minh rằng có ít nhất 4 cặp số mà hiệu của các số trong cặp là bằng nhau.

**4.22.** Trong 1 cuộc họp có 20 người tham dự; mỗi người quen ít nhất 13 người. Chứng minh rằng luôn xếp được 5 bàn, mỗi bàn 4 người mà mỗi người đều quen 2 người bên cạnh.

**4.23.** Trên 1 mặt phẳng cho 18 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng; nối tất cả các cặp điểm bằng các cạnh xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được một tứ giác mà các cạnh và các đường chéo của nó cùng 1 màu.

**4.24.**  Lấy 6 điểm trong hình chữ nhật . Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm có khoảng cách .

**4.25.**  Lấy 5 điểm trong tam giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm có khoảng cách .

**4.26.**  Lấy 17 điểm trong tam giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm có khoảng cách .

**4.27.**  Cho đa giác đều 9 đỉnh; mỗi đỉnh tô bằng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng có hai tam giác phân biệt có diện tích bằng nhau mà các đỉnh của mỗi tam giác được tô cùng một màu

**4.28.**  Trên một mặt phẳng, mỗi điểm được tô màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được 1 hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu.

**4.29.**  Cho 5 điểm A, B, C, D, E nằm trong mặt phẳng tọa độ và chúng đều là điểm có tọa độ nguyên và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất 3 tam giác mà diện tích của chúng là các số nguyên.

**4.30.** Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G nằm trong mặt phẳng tọa độ, chúng đều có tọa độ nguyên và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất 10 tam giác mà diện tích của chúng là các số nguyên.

**4.31.** Có thể tìm được 5 số nguyên sao cho các tổng của 2 trong 5 số đó tạo thành một dãy 10 số nguyên liên tiếp được không?

**4.32.** Có thể chia các số nguyên liên tiếp từ 1 đến 21 thành các nhóm rời nhau sao cho trong mỗi nhóm, số lớn nhất bằng tổng các số còn lại trong nhóm được hay không?

**4.33.** Cho 3 số nguyên  trong đó . Ta thực hiện phép biến đổi như sau:  trong đó

.

Sau n bước biến đổi ta có một bộ 3 số . Hỏi với phép biến đổi trên, sau một số hữu hạn bước có thể đưa về một bộ 3 số, trong đó có số 0

được hay không?

**4.34.** Có một dãy số . Ta thực hiện một phép xóa và

thay thế như sau: Nếu xóa 2 số a và b của dãy thì ta thay chúng bởi số . Hỏi sau 95 lần xóa, số còn lại trong dãy số là số nào?

**4.35.** Cho là tập các hàm số có tính chất sau:

1. Đóng với phép cộng: 
2. Đóng với phép nhân 2 hàm:
3. Đóng với phép nhân với số thực:

Hỏi có thể thực hiện các phép tính trên đối với các hàm  và  để thu được một hàm  hay không?

**4.36.** Cho 100 điểm trên 1 mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có thể chia 100 điểm này thành 50 cặp mà các đoạn thẳng nối chúng là không cắt nhau.

**4.37**. Có một hình vuông kích thước 4 x 4 = 16 ô vuông. Trên mỗi ô vuông ta ghi tùy ý dấu (+) hoặc dấu (-). Mỗi phép biến đổi là chọn 1 hàng hoặc 1 cột và đổi dấu các ô trên đó. Hỏi có thể đưa một hình vuông có 9 dấu (+) và 7 dấu (-) thành một hình vuông có 16 dấu (-) được không?

**4.38.** Có 21 thí sinh nam và 21 thí sinh nữ tham gia một kỳ thi toán. Mỗi thí sinh giải được tối đa 6 bài toán. Với mỗi cặp nam nữ bất kỳ, có ít nhất 1 bài toán mà cả 2 người đều giải được. Chứng minh rằng có ít nhất 1 bài toán được giải bởi ít nhất 3 thí sinh nam và 3 thí sinh nữ.

**4.39.** Có một tập thể n người có các tính chất sau đây: Hai người không quen nhau thì có đúng 2 người quen chung; hai người quen nhau thì không có một người nào quen chung. Chứng minh rằng tất cả mọi người đều có số người quen bằng nhau. Nếu coi mỗi người như một đỉnh của đồ

thị, hai người quen nhau được biểu diễn bởi một cạnh nối hai đỉnh. Hỏi đồ

thị này có những tính chất gì?

**4.40.** Trong đội cận vệ của một quốc vương có một số khá đông các hiệp sĩ, trong đó mỗi hiệp sĩ có không quá 3 người mà họ không ưa. Liệu có thể chia các hiệp sĩ thành 2 nhóm sao cho trong mỗi nhóm mỗi hiệp sĩ chỉ có tối đa một người mà họ không ưa hay không?

**4.41.** Cho 6 điểm trong mặt phẳng, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm bởi các cạnh xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng có ít nhất 2 tam giác một màu.

**4.42.** Cho một hình vuông kích thước  ô vuông đơn vị. Ta tô màu xanh hoặc đỏ cho đỉnh các ô vuông đơn vị. Chứng minh rằng luôn có thể tìm được ít nhất 10 hình chữ nhật rời nhau mà đỉnh của mỗi hình chữ nhật có cùng một màu.

* *Phần đọc thêm:*

*Nội dung của chương này có thể xem là một giáo trình riêng giúp người đọc tìm hiểu về Lý thuyết tối ưu trong Qui hoạch toán học, có liên quan khá chặt chẽ đến một số vấn đề trong Toán rời rạc..*

*Tuy nhiên trong phạm vi hạn chế về thời lượng của giáo trình Toán rời rạc ở bậc đại học ngành CNTT, người đọc có thể bỏ qua nội dung này.*

Phần II

Chương 5. BÀI TOÁN TỔ HỢP TỐI ƯU

## 5.1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Cho A là một tập hữu hạn, B là tập các cấu hình tổ hợp được tạo ra từ các phần tử của A, F(x) là một hàm xác định trên B. Giả sử  và tất nhiên B cũng là một tập hữu hạn. Bài toán đặt ra là: Tìm  sao cho:

 hoặc 

Trong bài toán này: F(x) gọi là hàm mục tiêu, B gọi là tập xác định của bài toán, mỗi  gọi là một phương án;  nếu có, gọi là phương án tối ưu;  gọi là giá trị tối ưu. Dưới đây ta hãy xét một vài bài toán tiêu biểu cho lớp các bài toán này.

**5.1.1. Bài toán người du lịch.**

Có n thành phố ; một người du lịch xuất phát từ một thành phố nào đó muốn đi qua tất cả các thành phố còn lại, mỗi thành phố đúng 1 lần rồi trở về nơi xuất phát. Biết  là chi phí đi từ  đến ; không nhất thiết . Hãy tìm hành trình thỏa mãn các điều kiện trên với tổng chi phí ít nhất.

Gọi mỗi hành trình thỏa mãn các điều kiện trên là x và B là tập tất cả các hành trình có thể có, mỗi hành trình là một hoán vị của n thành phố, do đó . Với mỗi hành trình x, tương ứng với một chi phí là F(x). Vậy bài toán đặt ra là:

Tìm  sao cho: . Đôi khi cũng viết



**5.1.2. Bài toán cái túi.**

Một nhà thám hiểm tìm kiếm được n mẫu quặng; mẫu quặng thứ i cân nặng  và có giá trị là (đ). Anh ta có một cái túi chỉ đựng được b (kg). Hỏi rằng khi từ rừng sâu trở về, nhà thám hiểm cần đem theo những mẫu quặng nào để có tổng giá trị là lớn nhất?

Ký hiệu  là biến nhị phân: , còn gọi là biến lựa chọn.

 có nghĩa là nhà thám hiểm sẽ chọn đem về mẫu quặng thứ i và  trong trường hợp ngược lại. Khi đó mô hình toán học của bài toán này là:





Ở đây mỗi  là một phương án, tương ứng với dãy nhị phân có độ dài n; do đó . Bài toán trên cũng có thể viết:



Đặc điểm của bài toán tổ hợp tối ưu là miền xác định của bài toán là một tập rời rạc, nên thuật toán giải các bài toán tổ hợp tối ưu hoàn toàn khác với thuật toán tìm cực trị của một hàm n biến trên một tập compact mà chúng ta đã biết trong giải tích các hàm nhiều biến.

Dưới đây ta cũng xét một vài thuật toán tiêu biểu.

## 5.2. THUẬT TOÁN DUYỆT TOÀN BỘ

Giả sử phải giải bài toán:  trong đó B là tập rời rạc. Để giải bài toán này trước tiên ta liệt kê các phần tử của B; sau đó với mỗi  ta tính F(x); và so sánh các giá trị của F(x) để tìm ra phương án tối ưu. Thuật toán đó gọi là thuật toán duyệt toàn bộ hay thuật toán điểm diện.

Nếu số phần tử của B là nhỏ thì thì thuật toán này rất có hiệu quả và dễ hiểu. Nếu |B| là khá lớn thì thuật toán này rất khó thực hiện, ngay cả việc thực hiện trên các máy tính hiện đại nhất. Chẳng hạn như trong bài toán người du lịch với  thì ta có  phương án.

Nếu mỗi giây máy tính duyệt được 1 triệu phương án thì máy tính phải làm việc trong thời gian liên tục là 1 307 674 giây, tương ứng với 3 700 giờ làm việc liên tục hay 154 ngày liên tục. Đó là một điều không khả thi.

Tuy nhiên cũng cần nhấn mạnh rằng có không ít bài toán tổ hợp tối ưu, chúng ta chưa có một thuật toán hữu hiệu nào ngoài thuật toán duyệt toàn bộ, khi đó trong quá trình liệt kê, chúng ta cần tận dụng những thông tin thu được ở mỗi bước để loại bỏ những phương án mà chắc chắn không phải là tối ưu. Một trong các giải pháp như thế được giới thiệu dưới đây với tên gọi “thuật toán nhánh cận”.

## 5.3. THUẬT TOÁN NHÁNH CẬN

Giả sử phải giải bài toán:



trong đó B là tập rời rạc.

Lược đồ tổng quát của thuật toán nhánh cận có thể mô tả như sau:

Bước 0:

Tìm cận dưới của F(x) trên B. Đó là một số, ký hiệu là:



Thông thường để tìm  người ta tìm một hàm non của F(x); đó là hàm  và đối với hàm non này ta dễ dàng tìm được cực tiểu của nó:



Do đó ta cũng có



Nếu tìm được  mà  thì  là phương án tối ưu. Nếu không ta chuyển sang bước 1.

Bước 1:

Chia B thành một phân hoạch . Để dễ trình bày và không kém phần tổng quát ta có thể lấy ; nghĩa là chia B thành 2 tập  và  mà:

 và 

Sau đó ta tìm các cận dưới  và , sự phân nhánh này tạo thành một cây và các cận dưới tăng dần 

Giả sử  và tìm được  mà  thì  là phương án tối ưu; nếu không thì chuyển sang bước sau.

Bước k:

Giả sử ở bước  ta có một phân hoạch  trong đó  và giả thiết rằng:



Ở bước k ta chia  thành một phân hoạch  và ; và giả sử ta đánh số lại các đỉnh treo cũ và các đỉnh treo mới từ 1 đến  và giả sử rằng:



Nếu tìm được  mà  thì  là phương án tối ưu; nếu không thì chuyển sang bước .



**Hình 5.1**

Vì số phần tử của B là hữu hạn nên khả năng xấu nhất là sự phân nhánh phải thực hiện cho đến khi mỗi đỉnh treo chỉ chứa một phần tử, như vậy thuật toán cũng sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Quá trình của thuật toán là thực hiện xen kẽ sự phân nhánh và tìm cận nên thuật toán được gọi tên là thuật toán nhánh cận (Branches anh Bounds).

Hiệu quả của thuật toán phụ thuộc chủ yếu vào việc chọn hàm non G(x) có sát với F(x) hay không và việc tìm cực tiểu của nó có dễ dàng không, cũng như sự phân nhánh có cho phép ta nhanh chóng tìm ra phương án tối ưu không.

Nếu việc tìm cực tiểu của G(x) trên các tập con, tức là tìm cận dưới của F(x) trên tập con đó lại rất khó khăn phức tạp thì thuật toán trở nên vô nghĩa. Ngược lại nếu vì mục đích tìm cận dưới một cách dễ dàng, ta chọn hàm non G(x) quá xa với F(x) tức là  khá lớn thì rất dễ dẫn đến tình huống phải phân nhánh cho đến khi mỗi đỉnh treo chỉ chứa một phần tử, khi đó thuật toán này cũng không hơn gì thuật toán duyệt toàn bộ vì ta phải xem xét đến từng phương án của tập B. Chính vì vậy mà sự phân nhánh và tìm cận phải căn cứ vào đặc thù về cấu trúc của bài toán mà lựa chọn cho thích hợp, không có giải pháp vạn năng cho mọi bài toán.

Dưới đây ta xét một trường hợp cụ thể.

***Thuật toán nhánh cận giải bài toán người du lịch.***

Ký hiệu  là ma trận chi phí. Mỗi hành trình x là một hoán vị của n thành phố, có thể biểu diễn dưới dạng:



Mỗi cặp (i, j) tương ứng với đường đi từ  đến  với chi phí .

Do đó chi phí cho hành trình x là:



Để giảm bớt khối lượng tính toán ta tiến hành rút gọn ma trận () theo cách sau đây:

* Rút gọn theo hàng: Trừ vào các phần tử của mỗi hàng phần tử nhỏ nhất của hàng đó, sau khi rút gọn theo hàng thì mỗi hàng có ít nhất một số 0.

Chú ý rằng trước khi rút gọn theo hàng thì các số  được thay bởi , điều này tương ứng với việc từ thành phố  bắt buộc phải đi đến một thành phố khác.

* Rút gọn theo cột: Trừ vào các phần tử của mỗi cột phần tử nhỏ nhất của cột đó, sau khi rút gọn theo cột thì mỗi cột có ít nhất một số 0.

Kết quả của việc rút gọn theo hàng và theo cột ta thu được một ma trận mới gọi là ma trận rút gọn và ký hiệu là  trong đó mỗi hàng và mỗi cột có ít nhất một số 0.

Ký hiệu:

 là tổng các hằng số rút gọn;

 là chi phí cho hành trình x trên ma trận ;

 là chi phí cho hành trình x trên ma trận ;

Thì sẽ có: 

Vì  nên , do đó  chính là cận dưới của F(x) trên B: 

Chú ý: Trên ma trận  hoặc  nếu đường đi từ  đến  bị cấm thì ta gán cho  hoặc , đương nhiên .

Trước tiên ta sẽ chọn một cặp (k, l) nào đó làm điểm xuất phát (nghĩa là

chọn đường đi từ  đến ); tất nhiên ta phải chọn cặp (k, l) nào mà . Ngoài ra ta ký hiệu B(k, l) là tập các hành trình chứa cung (k, l) và  là tập hành trình không chứa cung (k, l); thì ta sẽ có một phân hoạch bởi vì:





Thuật toán nhánh cận cho bài toán người du lịch được tiến hành theo các bước sau đây:

***Bước 1.***

a) Tìm cận dưới của F(x) trên B.

Rút gọn ma trận  theo hàng và theo cột.

 là tổng các hằng số rút gọn, ta sẽ có:



b) Chọn ô phân nhánh.

Tại các ô (i, j) mà  ta tính



 là tổng của hai số nhỏ nhất trên cột j và nhỏ nhất trên hàng i không kể số . Con số này thể hiện một khoản chi phí tối thiểu sẽ tăng lên cho hành trình nếu không sử dụng cung (i, j). Vì vậy ô phân nhánh (k, l) được chọn theo công thức sau đây

 mà 

c) Phân B thành 2 nhánh:

: tập các hành trình chứa cung (k, l)

: tập các hành trình không chứa cung (k, l).

d) Tìm các cận dưới  và .

Ta có:  bởi vì  là chi phí tối thiểu sẽ tăng lên cho các hành trình không sử dụng cung (k. l).

Còn  được tìm như sau:

Trong ma trận  ta xóa hàng k và cột l, đồng thời thay ,

điều này biểu thị “cấm đi từ  đến ” (vì đã chọn cung đi từ  đến

); ta thu được một ma trận cụt có  hàng và  cột.

Nếu ma trận cụt là ma trận rút gọn, nghĩa là trên mỗi hàng và mỗi cột có ít nhất một số 0 thì ta gọi đó là ma trận  và gán cho



Nếu ma trận cụt không phải là ma trận rút gọn thì ta rút gọn theo hàng và theo cột sẽ được ; ký hiệu  là tổng các hằng số rút gọn lần thứ hai này, thì ta sẽ có:





**Hình 5.2**

Nếu ma trận cụt là ma trận rút gọn thì .

***Bước 2.***

Ta sẽ tiến hành phân nhánh từ đỉnh nào có cận dưới nhỏ nhất.

1. Nếu  thì ta sẽ phân nhánh tại  bằng cách lặp lại bước 1 với ma trận .
2. Nếu  thì sẽ phân nhánh tại đỉnh  bằng cách lặp lại bước 1 với ma trận . Ma trận  là ma trận rút gọn của ma trận  trong đó ta thay** (cấm đi từ đến )

Tiếp tục quá trình phân nhánh và tìm cận như trên  lần thì sẽ thu được ma trận cụt kích thước .

Khi đó ta chuyển sang bước 3 là kiểm tra điều kiện tối ưu.

***Bước 3.***

Từ đỉnh treo có cận dưới nhỏ nhất và ma trận cụt kích thước  ta tìm được hành trình x. Tính chi phí F(x). Nếu  cận dưới của đỉnh này thì x là phương án tối ưu. Nếu  cận dưới của đỉnh này và các đỉnh treo khác thì tiếp tục phân nhánh tại đỉnh treo có cận dưới nhỏ nhất trong các đỉnh treo còn lại. Thuật toán sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

*Thí dụ.*

Giải bài toán người du lịch với chi phí cho dưới đây:



**Bảng 5.1**

***Bước 1.*** Rút gọn theo hàng và theo cột.



**Bảng 5.2**



**Bảng 5.3** 

Từ bảng 5.1, rút gọn theo hàng được bảng 5.2, rút gọn bảng 5.2 theo cột được bảng 5.3: là ma trận rút gọn .



Từ bảng 5.3 ta tính các số:











Ta chọn cung (6, 1) là cung đầu tiên để phân nhánh. Chia B thành một phân hoạch  và  ta được một cây dưới đây:



**Hình 5.3**

Cách tính cận dưới của mỗi nhánh được thực hiện như sau:



Để tính  ta xét ma trận cụt của ma trận ; đó là ma trận  ta xóa đi hàng 6, cột 1 và thay .

Đó là bảng 5.4. Rút gọn theo hàng ta được bảng 5.5 với hằng số rút gọn là ; do đó:





**Bảng 5.4**



**Bảng 5.5**

***Bước 2.***

Tìm đỉnh phân nhánh: Vì  nên ta phân nhánh tại đỉnh . Bây giờ ta chọn ô phân nhánh, xuất phát từ bảng 5.5 ta tính được:



Ta phân nhánh  thành 2 tập  và ; và có cây dưới đây:



**Hình 5.4**

Ma trận cụt ở bước 2 là ma trận  xóa đi hàng 4, cột 6; đây là ma trận đã rút gọn (bảng 5.6) nên , do đó 



**Bảng 5.6** 

***Bước 3.***



Ta chia  thành 2 tập  và ; được cây dưới đây:



**Hình 5.5**

Ma trận cụt ở bước này là bảng 5.6 xóa đi hàng 5, cột 4; đó là bảng 5.7; sau khi rút gọn được bảng 5.8 với hằng số rút gọn  nên





**Bảng 5.7 Bảng 5.8** 

***Bước 4.***

So sánh cận dưới của các đỉnh treo ta thấy  là nhỏ nhất nên ta phân nhánh tại đỉnh này. Muốn vậy ta phải xuất phát từ ma trận , đó là ma trận  mà ta thay  (cấm đi từ  đến ).

Đó là bảng 5.9.



**Bảng 5.9.** ()

Sau khi rút gọn với hằng số rút gọn  ta được bảng 5.10; đó là ma trận .



**Bảng 5.10.** 

Từ bảng 5.10 ta tìm ô phân nhánh. Ta có:



Ta chọn ô (6, 2) để phân nhánh. Khi đó  được chia thành 2 tập  và .

Dễ dàng tìm được



Muốn tìm cận dưới của  ta phải xét ma trận cụt của ; đó là bảng 5.10 xóa đi hàng 6, cột 2 và thay .

Đó là bảng 5.11, ma trận này phải rút gọn theo hàng 1 với .

Do đó





**Bảng 5.11**

Sau khi phân nhánh tại đỉnh  ta được cây dưới đây:



**Hình 5.6**

***Bước 5.***

So sánh cận dưới tại các đỉnh treo ta có:



Nên phải tiến hành phân nhánh tại đỉnh .

Xuất phát từ bảng 5.8 ta có: 



Nên ta chọn ô (2, 5) để phân nhánh. Khi đó  được chia thành 2 tập  và . Dễ dàng tính được:



Ma trận  thu được từ bảng 5.8 xóa đi hàng 2, cột 5 là bảng 5.12 dưới đây:



**Bảng 5.12**

Đây là ma trận  nên ta kết thúc sự phân nhánh và kiểm tra tính tối ưu của phương án. Kết quả của sự phân nhánh ở bước 5, ta có cây dưới đây:



**Hình 5.7**

Từ bảng 5.12 ta thấy  chỉ có thể chứa 2 cung  và .

Do đó ta tìm được chu trình:



Chi phí cho chu trình này là:



Điều kiện tối ưu được thỏa mãn.

Vậy  là phương án tối ưu và giá trị tối ưu là .

## BÀI TẬP CHƯƠNG 5

**5.1.** Áp dụng thuật toán nhánh cận để giải bài toán người du lịch với các ma trận chi phí dưới đây

a) 

b) 

**5.2** Giải các bài toán cái túi dưới đây bằng phương pháp quy hoạch động

a) 



 và nguyên 

b) 



 và nguyên 

c) 



 và nguyên 

d) 



 và nguyên 